¿Qué es la lógica?

El la ciencia de los principios de la **validez** formal de los razonamientos. Dicho de otra forma, trata de establecer unas leyes que, si las seguimos, siempre razonaremos bien.

Hay que diferenciar entre verdad (lo que dices se corresponde con lo que pasa: “ahora estoy despierto”) y la validez (cuando un razonamiento es correcto, cuando la conclusión se sigue de las premisas). La lógica se centra en la validez.

Esto vale para la lógica aristotélica (los modos del silogismo AAA, EAE, AII, etc.) y para la lógica formal (o matemática). Nos vamos a centrar en la lógica matemática.

Lógica matemática

Introducción

Realmente es fácil, imagínate que te quiero enseñar un juego del que desconoces casi todo (el ajedrez). Para hacerlo tendría que explicarte (definirte) primero los elementos con los que vamos a jugar (el tablero, las piezas) luego explicarte las reglas (los movimientos legales de las piezas) y después se trataría de ponerse a jugar y coger destreza. Otro ejemplo (mejor que el anterior) son las matemáticas. Imagínate que quiero explicar matemáticas desde el principio a un extraterrestre. Tendría que explicarle los símbolos que se emplean (1, 2, 3, ...9, 0, +, -, etc) y cómo se combinan entre sí, y cómo se calcula (las reglas de la suma, resta, etc). En realidad lo que te voy a explicar es muy parecido. Un lenguaje nuevo, con símbolos nuevos y reglas nuevas. Vamos allá.

La lógica de proposiciones (enunciados)

Para qué sirve la lógica, qué sentido tiene: Como te decía al principio la lógica busca la forma correcta de razonar. Cuando nosotros razonamos lo hacemos en castellano (nuestra lengua materna, nuestro lenguaje natural). Aristóteles lo hacía también en su lenguaje natural. Resulta que el lenguaje natural da lugar a multitud de problemas y equívocos (qué pasa cuando x tiende a infinito) y muchas veces razonamos mal sólo por culpa del lenguaje. Por esto se ha creado el lenguaje lógico que es mucho más preciso y si lo utilizamos bien es imposible que razonemos mal. Así imagínate que nos ponen un razonamiento muy complejo en castellano y nos preguntan si es válido. Lo pasaríamos mal para saber si es válido o no. Solución: Traducimos del lenguaje natural (castellano) al lenguaje lógico y utilizando este lenguaje nos resulta muy fácil saber si el razonamiento es correcto (válido) o no.

El lenguaje de la lógica

La lógica se desarrolla en forma de cálculo que está compuesto por tres elementos:

1. **Un conjunto de símbolos elementales** (de tres clases):
 - a. **Letras proposicionales.** Son letras minúsculas a partir de la “p”: **p, q, r, s, t, ...** Representan proposiciones o enunciados (oraciones enunciativas, **no** exclamativas, ni desiderativas, ni interrogativas). Te recuerdo que una

oración enunciativa es aquella de la que se puede decir si es verdadera o falsa. Así pues cada letra proposicional representa una proposición (Hoy ha llovido) y, o bien es verdadera (V) o falsa (F), no puede ser una cosa intermedia, tampoco pueden ser verdadera y falsa a la vez. Algunas veces se emplean letras mayúsculas a partir de la A. Prácticamente es lo mismo, la diferencia es que una letra minúscula representa una proposición (es atómica) y una letra mayúscula representa una fórmula compuesta por varias proposiciones y conectivos (es molecular).

b. **Símbolos conectivos:** Se llaman así porque se utilizan para conectar (unir) letras proposicionales. Hay cinco símbolos:

i. $\neg$ (**negación**). Su función es cambiar el valor de verdad de las letras proposicionales. Recuerda que cada letra (p, q, ...) puede ser verdadera o falsa. Si se pone la negación antes de la letra el conjunto ($\neg p$) cambia de valor. En una tabla de verdad:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Fíjate en las filas cuando p es V, $\neg p$ es F
cuando p es F $\neg p$ es V

ii. $\wedge$ (**conjunción**). Une dos letras. El resultado de la unión **sólo es Verdadero** cuando las dos letras son Verdaderas. En una tabla de verdad:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Te explico lo de la tabla: “p” puede ser V o F y “q” lo mismo (V o F). La tabla sirve para analizar todas las posibilidades (cuando p y q son verdaderas, primera fila. Cuando p es verdadera y q falsa, segunda fila. Cuando p es F y q V, tercera fila. Cuando p y q son ambas falsa, cuarta fila). Vemos como te había dicho antes que la conjunción ($p \wedge q$, tercera columna) solo es verdadera cuando p y q son verdaderas (primera fila), en el resto de los casos es falsa.

iii. $\vee$ (**disyunción**). Une dos letras. El resultado de la unión sólo es falsa cuando las dos (p y q) son falsas. En una tabla de verdad:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

iv. $\rightarrow$ (**implicación**). Une dos letras. El resultado de la unión sólo es falso si el antecedente (la letra que está a la izquierda de la implicación) es verdadero y el consecuente (la letra que está a la derecha de la implicación) es falso. En una tabla:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- v. $\leftrightarrow$ (doble implicación). Une dos letras. El resultado de la unión es verdadero cuando los valores del antecedente y el consecuente coinciden (son los dos verdaderos o son los dos falsos a la vez). En una tabla de verdad:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- c. Símbolos ortográficos como los paréntesis o corchetes. Tienen la misma función que tienen en matemáticas.
2. **Unas reglas de formación.** Establecen como se unen los símbolos anteriores para construir formulas bien formuladas. No creo que te las tengas que aprender aunque son fáciles.
3. **Unas reglas de transformación.** Son las reglas del razonamiento, del cálculo. Permiten razonar, pasar de una fórmula bien formulada a otra de forma correcta (válida). Aunque tienes que aprender sus nombres, ya te las sabes si has aprendido bien lo único que hay que aprender de memoria en lógica: cinco frases que ya te he dicho y te repito por su importancia:
- Si se pone la negación antes de la letra el conjunto cambia de valor
 - Una conjunción **sólo es Verdadera** cuando antecedente y consecuente son Verdaderos. En el resto de los casos es falsa
 - Una disyunción **sólo es falsa** cuando antecedente y consecuente son falsos. En el resto de los casos es verdadera.
 - Una implicación **sólo es falsa** si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. En el resto de los casos es verdadera.
 - Una doble implicación es verdadero cuando los valores del antecedente y el consecuente coinciden (son los dos verdaderos o son los dos falsos a la vez). Cuando son distintos la doble implicación es falsa.

Las reglas se pueden presentar de muchas maneras y tienen muchos nombres, pero son siempre las mismas. Vamos a dividir las en dos grupos:

- Reglas de introducción. Añaden (introducen) un conectivo a la formula resultante. (En la conclusión hay un conectivo que no estaba en las premisas)
- Reglas de eliminación. QUITAN (eliminan) un conectivo a la fórmula resultante. (en la conclusión desaparece un conectivo que estaba en las premisas)

Reglas de introducción

Regla de introducción de la doble negación

p

$\neg\neg p$

(recuerda la primera frase). Si una letra proposicional es verdadera su negación será falsa y la negación de la negación, será verdadera

Regla de Introducción de la conjunción (RI[^])

p

q

$p \wedge q$

(recuerda la segunda frase) siendo “p” V y “q” también V, podemos concluir que “p $\wedge$ q” es V. Mira en la primera fila de la tabla de verdad de la conjunción.

Regla de Introducción de la disyunción (RI^v)

p

$p \vee q$

(recuerda la tercera frase). Para que una disyunción sea verdadera basta que uno de los dos (antecedente o consecuente) sea verdadero. En este caso si sabemos que p es verdad podemos concluir que será verdad p $\vee$ (lo que sea) ya que p es verdad. Mira las filas primera y segunda de la tabla de verdad.

Regla de introducción de la doble implicación

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$p \leftrightarrow q$

Reglas de eliminación

Regla de eliminación de la negación, llamada también doble negación

$\neg\neg p$

p

(recuerda la primera frase). Una negación cambia el valor de verdad de la letra, una negación de la negación (dos negaciones) cambia el valor de la negación dejando el valor de verdad como estaba. Imaginemos que p es verdad, $\neg p$ será falso y $\neg\neg p$ será otra vez verdad.

Regla de la eliminación de la conjunción (dos variantes)

$p \wedge q$

$p \wedge q$

p

q

(recuerda la segunda frase). Si la conjunción es verdadera antecedente y consecuente lo son, luego puedo concluir que serán verdad p y también q. Primera fila de la tabla de verdad de la conjunción.

Regla de eliminación de la disyunción (dos variantes)

$p \vee q$

$p \vee q$

$\neg p$

$\neg q$

q

p

No es fácil de ver al principio pero tu puedes (recuerda la tercera frase). Si sabes que una disyunción es verdadera y que el antecedente (p) es falso (si $\neg p$ es verdadero, p, que es el antecedente de la disyunción, es falso) q tiene que ser verdadero (si q fuese falso, la disyunción sería falsa porque, recuerda, p también es falso y una disyunción con antecedente y consecuente falsos es falsa). Dicho de otra manera: como la disyunción es verdadera, por lo menos uno (antecedente o consecuente) tienen que ser verdaderos. Así si el antecedente es falso, el consecuente tiene que ser verdadero; y viceversa, si el consecuente es falso el antecedente tiene que ser verdadero. Al menos uno tiene que ser verdad, si te dicen que uno es falso, el otro tiene que ser verdadero. Mira las filas segunda o tercera de la tabla de verdad.

Regla de eliminación de la implicación (dos variantes). Reciben dos nombres especiales Modus Ponens (MP) y Modus Tollens (MT)

Modus ponens

$p \rightarrow q$

p

q

(recuerda la cuarta frase). Si una implicación es verdadera y el antecedente (en este caso p) es verdadero, el consecuente tiene que ser verdadero (si el consecuente fuese falso y el antecedente verdadero, la implicación sería falsa. Mira la tabla de verdad, la segunda fila).

Modus Tollens

$p \rightarrow q$

$\neg q$

$\neg p$

(recuerda la cuarta frase). Si una implicación es verdadera y el consecuente (q) falso ($\neg q$ verdadero), el antecedente (p) tiene que ser falso, o lo que es lo mismo ($\neg p$ tiene que ser verdadero). Mira en la tabla de verdad de la implicación, la última fila.

¡**OJO!** No confundir con otras formas **no válidas** de razonar:

$p \rightarrow q$

$\neg p$

$\neg q$

Te explico por qué no es válida. Si la implicación es verdadera y el antecedente falso ($\neg p$ verdadero), el consecuente puede ser verdadero o falso (mira en las filas tercera y cuarta de la tabla de verdad). No se puede saber si q es verdadero o falso por lo que no puedes concluir que $\neg q$ es verdadero (como dice la conclusión)

Tampoco es válido el siguiente razonamiento:

$p \rightarrow q$

q

p

Te explico por qué. Si la implicación es verdadera y el consecuente (q) es verdadero, no puedes saber cómo será el antecedente (p) ya que puede ser verdadero o falso. Por lo tanto no puedes concluir que p es verdadero.

Regla de eliminación de la doble implicación

$$\frac{p \leftrightarrow q}{(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)}$$

Otras reglas

Hay muchas más. Yo te voy a poner algunas que son útiles para resolver los problemas que te ponga. Al final lo que vas a tener que hacer es saber si una conclusión se sigue de una premisas. Te pondrán unas premisas y una conclusión y te pedirán que demuestres si esa conclusión se sigue de esas premisas, utilizando las reglas. Veamos algunas: Estas primeras sirven para sustituir un conectivo por otro. Pueden ser útiles si no te acuerdas de alguna regla, cambiando el conectivo puedes aplicar otra regla

Interdefiniciones entre la disyunción y la implicación

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg A \vee B} \qquad \frac{A \vee B}{\neg A \rightarrow B}$$

Se puede cambiar una implicación por una disyunción negando el antecedente.
Se puede cambiar una disyunción por una implicación negando el antecedente. Si haces las tablas de verdad veras que ambas fórmulas son iguales $p \vee q$ es igual que $\neg p \rightarrow q$. Demostración por tablas: (fíjate en las dos últimas columnas, son iguales).

p	$\neg p$	q	$\neg p \rightarrow q$	$p \vee q$
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	F

Leyes De Morgan. Son también interdefiniciones. Transforman conjunciones y disyunciones dentro de paréntesis precedidas de una negación en disyunciones y conjunciones:

$$\frac{\neg(A \wedge B)}{(\neg A) \vee (\neg B)}$$
$$\frac{\neg(A \vee B)}{(\neg A) \wedge (\neg B)}$$

Si haces las tablas verás que son iguales las premisas (lo que están encima de la línea horizontal) que la conclusión (lo que está debajo de la línea horizontal).

Otras regla es la conmutativa que se cumple en la conjunción, en la disyunción y en la doble implicación (no en la implicación ya que no es lo mismo $p \rightarrow q$ que $q \rightarrow p$).

Otra regla es la de la transitividad de la implicación:

$$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$$

Otras reglas un poco más complicadas (porque tienen tres premisas y una conclusión) son los dilemas. Todos tienen la misma estructura: las premisas son una disyunción y dos implicaciones. Te pongo varios ejemplos de dilemas y luego te explico cómo funcionan:

$p \vee q$	$p \vee q$	$p \vee q$	$p \vee q$
$p \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$r \rightarrow \neg p$	$p \rightarrow q$
$q \rightarrow r$	$q \rightarrow s$	$s \rightarrow \neg q$	$q \rightarrow s$
r	$r \vee s$	$\neg r \vee \neg s$	s

Hay más dilemas, pero si te fijas todos tienen la misma estructura. Sabes que las tres premisas son verdaderas. Como la primera premisa es una disyunción sabes que al menos una de las letras proposicionales (p ó q) es verdadera, puede que las dos, pero si es sólo una, no sabes cuál de las dos. Primero supones que el antecedente (p) es verdadero y con esa suposición miras las otras premisas. Si p es V y aplicamos el Modus Ponens (fíjate en los dos primeros dilemas), r tendría que ser verdadera. Ahora suponemos que el consecuente de la disyunción (q) es verdadero. Con esta suposición miramos a las otras premisas y vemos que si q es verdad serán verdad r (en el primer dilema), s (en el segundo y en el cuarto dilema), y $\neg s$ (en el tercer dilema aplicando el Modus Tollens en la tercera premisa). No sabemos cuál de las dos es verdadera pero si tienes en cuenta lo anterior verás que necesariamente la conclusión de todos los dilemas es verdadera.

Hay más pero creo que con estas vale para resolver la mayoría de los

Cómo resolver los problemas de lógica

Es lo mismo que decir cómo saber si una conclusión se sigue de las premisas (o dicho de otra manera cómo saber si un razonamiento es válido). **Definición de consecuencia (conclusión) válida:** Hay consecuencia válida cuando **siempre que** las premisas sean verdaderas la conclusión también lo es.

Te pondrán una premisa y una conclusión y te dirán que demuestres que la conclusión se sigue o no de las premisas. Para distinguirlo lo puede hacer de dos formas:

Premisa 1, premisa 2, premisa 3, ... $\vdash$ Conclusión (ese símbolo separa la conclusión de las premisas)

Premisa 1

Premisa 2

Premisa 3

...

Conclusión

Se utilizan varios métodos para saber si hay consecuencia válida. Te voy a enseñar dos de ellos:

- Mediante las **tablas de verdad** (es más engorroso y lento pero creo que debes saber hacerlo)
- Aplicando las **reglas de inferencia** que hemos visto.

Tablas de verdad

Las tablas de verdad son un procedimiento que utilizamos para calcular todos los posibles valores de verdad de un enunciado molecular.

Cada letra proposicional puede tomar dos valores V ó F (a veces escriben 1 para verdadero y 0 para falso).

- Si hay sólo una letra hay dos posibilidades
- Si hay dos letras 4 posibilidades al combinar la V y la F
- Si hay tres letras 8 posibilidades de combinación
- En general 2^n , siendo n el número de letras que hay que combinar

El problema está en encontrar todas las combinaciones posibles sin que se nos escape ninguna y sin repetir las combinaciones. Hay un truco para no equivocarse. Imagínate que tenemos que construir una tabla de cuatro letras (p, q, r y s). 2^4 son 16 combinaciones (tiene que tener 16 filas).

Primero ponemos las cuatro columnas y al comienzo de cada una de ellas la letra correspondiente:

p	q	r	s
V	V	V	V
V	V	V	F
V	V	F	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	V	F
V	F	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V

F	V	V	F
F	V	F	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	V	F
F	F	F	V
F	F	F	F

Segundo si son 16 filas en la **primera columna** ponemos la primera mitad de 16 (8) con 8 V y la segunda mitad con 8 F. En la **segunda columna** la mitad de la mitad (es decir 4) V y cuatro F, y otra vez cuatro V y cuatro F. En la **tercera columna**, la mitad de la mitad de la mitad (es decir 2) dos V y dos F (lo repetimos hasta completar). En la cuarta columna nos quedaría alternativamente una V y una F (y repetir hasta completar).

Tercero. Vamos añadiendo a la derecha columnas con las fórmulas de las premisas. Si son muy complejas, para no equivocarse conviene hacerlo por partes y en orden. El orden es muy importante, si te lo saltas el resultado es erróneo. Primero se hace (como en las operaciones matemáticas) lo que está dentro de los paréntesis, después las negaciones, después las conjunciones y las disyunciones (no puede haber dos al mismo nivel: o bien alguna está entre paréntesis o bien están separadas por implicaciones o dobles implicaciones), después la implicaciones y después las dobles implicaciones. Vamos a verlo con un ejemplo. Imagínate que una premisa es la siguiente (pongo sólo dos letras para que no haya muchas filas:

$$(q \rightarrow \neg p) \vee (p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg (q \wedge p)$$

Lo primero como sólo hay dos letras pongo las cuatro combinaciones:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Luego añado las columnas a la derecha por orden. Primero las fórmulas que están entre paréntesis, y dentro de los paréntesis, si hay más de un conectivo, sigo el orden señalado (en el primer paréntesis, primero la negación y luego la implicación). Cuando he terminado las partes que están entre paréntesis, las uno siguiendo el orden señalado (primero niego el último paréntesis, después uno mediante la disyunción los dos primeros paréntesis y por último uno mediante la implicación los dos primeros paréntesis, al último negado. Vamos a verlo por partes (cada columna a la derecha es un paso): Para poner el valor correcto hay que saberse las cinco frases

p	q	$\neg p$	$q \rightarrow \neg p$	$p \leftrightarrow q$	$q \wedge p$	$\neg (q \wedge p)$	$(q \rightarrow \neg p) \vee (p \leftrightarrow q)$	$(q \rightarrow \neg p) \vee (p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg (q \wedge p)$
V	V	F	F	V	V	F	V	F
V	F	F	V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V

Si sigues otro orden el resultado es distinto y por lo tanto erróneo. La fórmula resultante sólo es falsa cuando p y q son verdaderos a la vez, en el resto de los casos es verdadera.

¿Cómo saber si la conclusión se sigue de las premisas (si hay consecuencia válida) mediante tablas de verdad?

Tienes que hacer las tablas de las fórmulas de las premisas y de la conclusión y ponerlas en columnas paralelas. Luego te fijas en las filas, y si siempre que las premisas sean verdaderas a la vez en todas las filas, la conclusión también es verdadera, entonces la conclusión se sigue de las premisas (en caso contrario, es decir, si hay alguna fila en la que las premisas son verdaderas a la vez y la conclusión es falsa, entonces la conclusión no se sigue de las premisas). **Ojo** si en ninguna fila las premisas son verdaderas a la vez **SÍ** hay consecuencia válida.

Otra forma de hacerlo: unes las premisas mediante conjunciones y el resultado lo unes a la conclusión mediante una implicación. Si la fórmula resultante es siempre verdadera hay consecuencia válida, si hay alguna F, no hay consecuencia válida:

$(\text{premisa } 1^a) \wedge (\text{premisa } 2^a) \wedge (\text{premisa } 3^a) \rightarrow \text{Conclusión}$

Como ves es bastante engorroso. Hay otra forma de hacerlo mucho más rápida pero creo que tienes que saber este procedimiento.

Otra cosa importante sobre las tablas de verdad:

Cuando haces la tabla de verdad de una fórmula te pueden salir tres tipos de resultados:

- Que todos los valores sean verdaderos. Esto quiere decir que esa fórmula es siempre verdadera y no importa si las proposiciones que la forman son verdaderas o falsas. A estas fórmulas se las llama **tautologías**, o se dice que son fórmulas tautológicas.
- Que todos los valores sean falsos. Eso quiere decir que esa fórmula siempre es falsa y no importa si las proposiciones (enunciados) que la forman son verdaderas o falsas. A estas fórmulas se las llama **contradicciones**, o se dice que son fórmulas contradictorias.
- Que los valores en unas filas sean verdaderos y en otras falsos (como en la fórmula que hemos visto más arriba: el valor de la primera fila es falso y los demás verdaderos). Se dice que estas fórmulas son **indeterminadas**. Su verdad final depende de la verdad de las proposiciones que la componen.

Un ejemplo de tautología:

$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \rightarrow q)$	$(\neg q \rightarrow \neg p)$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Un ejemplo de contradicción

$p \wedge \neg p$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Resolución de problemas mediante reglas de inferencia

Es un procedimiento más sencillo. Se hace por pasos que hay que numerar.

En primer lugar se pone el número del paso de forma consecutiva: 1, 2, 3, ...

A continuación a la derecha del número, la fórmula.

A continuación a la derecha de la fórmula la explicación sobre de dónde ha salido la fórmula (si es una premisa o cuál ha sido la regla que hemos aplicado para llegar a ella).

Veámoslo mediante un ejemplo (primero te pongo el problema resuelto y luego te explico cada paso):

El problema (las premisas y la conclusión):

$p \vee q, \neg p, q \rightarrow r, s \rightarrow \neg r \vdash q \wedge \neg s$

- 1) $p \vee q$ Premisa 1
- 2) $\neg p$ Premisa 2
- 3) $q \rightarrow r$ Premisa 3
- 4) $s \rightarrow \neg r$ Premisa 4
- 5) q REv 1,2
- 6) r MP 3,5
- 7) $\neg s$ MT 4,6
- 8) $q \wedge \neg s$ RI[^] 5,7 Como se quería demostrar (he llegado a partir de las premisas a la conclusión).

Explicación:

Como ves cada paso que se da, se numera. Hemos dado ocho pasos.

En los **cuatro primeros pasos** hemos copiado directamente las premisas y lo hemos indicado a la derecha de cada premisa (premise 1, premise 2,...)

Paso 5: hemos utilizado la regla de la eliminación de la disyunción. Te explico cómo: Sabemos que la disyunción $p \vee q$ es verdadera (lo sabemos porque es una premisa y todas lo son). También sabemos que $\neg p$ es verdad (también es una premisa). Recuerda (por las cinco frases que tienes que saber a la perfección) que una disyunción es verdadera cuando al menos una de las dos proposiciones es verdadera (la disyunción sólo es falsa cuando antecedente y consecuente son falsos a la vez). También sabemos que p es falsa (porque $\neg p$ es verdad). Entonces si una de las proposiciones de la disyunción tiene que ser verdadera y una es falsa (p), la otra q tiene que ser verdadera. Como he demostrado que q es verdad en el paso 5 pongo la q y a la derecha pongo el nombre de la regla que he aplicado (REv, Regla de Eliminación de la disyunción) y los números de los pasos de los elementos en los que he utilizado la regla: 1 (paso 1: $p \vee q$), 2 (paso 2: $\neg p$).

Paso 6: Hemos utilizado la regla del Modus Ponens y la hemos aplicado a los pasos 3 ($q \rightarrow r$) y 5 (q). Recuerda la frase cuarta: una implicación sólo es falsa si el antecedente es verdadero y el consecuente falso; por lo tanto si una implicación es verdadera ($q \rightarrow r$) y el antecedente es verdadero (q), el consecuente (r) tiene que ser verdadero. Recuerda si el consecuente fuese falso y el antecedente verdadero, la implicación sería falsa (y hemos dicho que es verdadera ya que es una premisa). Así hemos demostrado que r es verdad. Ponemos, en el paso 6, r y a la derecha la regla que hemos aplicado (MP) y el número de los pasos de las fórmulas en las que hemos aplicado la regla (3 y 5).

Paso 7. Ponemos el resultado de la aplicación de la regla $\neg s$, la regla que hemos aplicado para obtenerlo (MT) y los números de los pasos sobre los que hemos aplicado

la regla (4 y 6). Si te acuerdas de la cuarta frase, sabrás que una implicación verdadera ($s \rightarrow \neg r$) cuyo consecuente, $\neg r$, es falso (r es verdadero según el paso 6), el antecedente (s) tiene que ser falso (si fuese verdadero la implicación sería falsa y hemos dicho que es verdadera). Si no lo ves, mira la tabla de verdad (cuarta fila).

Paso 8. En el paso 5 habíamos demostrado que q es verdadera y en el paso 7 hemos demostrado que $\neg s$ es verdadero. Según la segunda frase si dos proposiciones son verdaderas, la conjunción de ambas es verdadera. Así pues $q \wedge \neg s$ (que es la conclusión a la que queríamos llegar) tiene que ser verdadera. Ponemos la fórmula resultante, la regla que hemos utilizado ($RI^{\wedge}$) y los pasos sobre los que hemos aplicado la regla.

Así se demuestra una fórmula a partir de unas premisas. El secreto está en hacer unos cuantos ejercicios, coger práctica y después salen solos. Cuantos más hagas mejor.

Una estrategia que facilita la realización de los ejercicios es mirar, en primer lugar, a la conclusión. Ahí queremos llegar, nos preguntamos, qué necesitamos (en el ejemplo anterior queremos llegar a $q \wedge \neg s$ y para ello, necesitamos demostrar que q es verdad y que $\neg s$). Ahora nos preguntamos qué necesitamos para demostrar q y qué necesitamos para demostrar $\neg s$. Y así sucesivamente. Se trata de ir de atrás hacia delante. Es como los pasatiempos esos en los que hay que buscar la salida y que es mejor ir del final al principio. Después resolvemos el del principio al final conociendo ya todos los pasos.

Otro poco de teoría.

Si miras los ejercicios, lo que hacemos es demostrar una conclusión a partir de unas premisas que consideramos verdaderas. La pregunta es ¿cómo sabemos que las premisas son verdaderas? La respuesta, porque las hemos obtenido a partir de otras premisas verdaderas. ¿Y estas últimas premisas, cómo sabemos que son verdaderas? La respuesta es la misma: porque las hemos obtenido de otras verdades anteriores. Así podríamos estar preguntándonos indefinidamente. Conclusión: para que haya fórmulas verdaderas tiene que haber unas **primeras** verdades (digo primeras porque no han podido ser obtenidas de otras anteriores ya que en este caso serían segundas). Si no hay primeras verdades, no hay segundas ni terceras ni ninguna verdad. A estas primeras verdades no demostradas ni demostrables se las llama **axiomas**. ¿Cómo sabemos que son verdaderas? Por intuición, **son evidentes**. Algunas de estas verdades evidentes podrían ser:

- Lo que es, es: $p \rightarrow p$
- Nada puede ser y no ser al mismo tiempo: $\neg (p \wedge \neg p)$

Si haces las tablas de verdad de esas fórmulas verás que son tautologías.

Los axiomas más empleados en lógica:

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
2. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r))$
3. $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

Resumiendo: Un **axioma** es una fórmula que se acepta **sin demostración**, como punto de partida para demostrar otras fórmulas. Las fórmulas demostradas a partir de los

axiomas se llaman **teoremas**. Así un **teorema** es una **verdad** demostrada a partir de axiomas o de otros teoremas.

Para saber que son axiomas los tres anteriores, basta con que hagas las tablas de verdad de cada una de las fórmulas y verás que el resultado es siempre V (son tautologías). Otra forma de mostrar (que no demostrar) sería:

$$\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p) \quad (\text{fíjate que no hay premisas, solo conclusión})$$

Entre las reglas que no te he enseñado hay una muy útil que se llama Metateorema de Herbrand (también conocido como teorema de la deducción) que dice que: **que si el conectivo más importante (el que está fuera de paréntesis) de una conclusión es una implicación ($\rightarrow$), el antecedente puede pasar como premisa quedando el consecuente como conclusión**. Así las fórmulas siguientes serían equivalentes y se podría pasar de una a otra:

$$\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$p \vdash q \rightarrow p$ Y a su vez esta se podría convertir en :

$p, q \vdash p$ (la conclusión sería verdadera puesto que p es una premisa, no hace falta demostrar nada.

Repitamos el proceso con el tercer axioma:

$\vdash (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ Si aplicamos el metateorema de Herbrand (o teorema de la deducción), la fórmula anterior sería equivalente a:

$\neg p \rightarrow \neg q \vdash q \rightarrow p$ A su vez esta sería equivalente a:

$\neg p \rightarrow \neg q, q \vdash p$ (ahora tendríamos que demostrar que la conclusión (p) es verdadera siempre que las premisas lo sean. Vamos allá:

1. $\neg p \rightarrow \neg q$ premisa nº 1
2. q premisa nº 2
3. p Modus Tollens 1, 2

Demostrado. Si la premisa primera es verdadera y el consecuente ($\neg q$) es falso (ya que según la premisa nº 2 q es verdadero), entonces el antecedente de la implicación ($\neg p$) tiene que ser falso (si fuese verdadero la implicación tendría que ser falsa, recuerda la frase cuarta, y es verdadera porque es una premisa). Por lo tanto p (que es la conclusión) tiene que ser verdadera.

El metateorema de Herbrand (o teorema de la deducción) puedes utilizarlo como una regla más de las que te había señalado. Es muy útil siempre que la conclusión sea una implicación.